BAREM clasa a XII-a

1. a) Justificarea necomutativității şi a faptului că din $A = I_3 + B$ cu $B^3 = 0$ rezultă $A^p = I_3$ .... 2 puncte

b) Fie k exponentul lui $G \times H$. Rezultă $(g, h)^k = (e_1, e_2)$, deci $g^k = e_1$, $h^k = e_2$, pentru orice $g \in G$, $h \in H$, deci $n|k$ şi $m|k$. Aşadar $[m, n] | k$. Rezultă $k = [m, n]$ .... 2 puncte

c) Dacă $n = 4$ considerăm grupul D_4.

Dacă $n \neq 2^k$, ($k \in \mathbf{N}^*$) alegem $G = G_p \times \mathbf{Z}_n$, unde p este prim cu $p \geq 3$ şi $p|n$. Pentru $n = 2^k$, $k \geq 3$ considerăm $G = D_4 \times \mathbf{Z}_n$ .... 3 puncte

2. a) Există $c \in [0, 1]$ cu $f(c) > g(c)$; din continuitate există $\lambda > 1$ şi $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ astfel ca $\frac{f(x)}{g(x)} \geq \lambda$ pe $[\alpha, \beta]$. Atunci

$$x_n \geq \int_\alpha^\beta f(x)\lambda^n \mathrm{d}x,$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ .... 4 puncte

b) Integrăm inegalitatea numerică

$$f^{n+1}(x) + g^{n+1}(x) \geq f^n(x)g(x) + f(x)g^n(x).$$

Folosind ipoteza rezultă $(x_n)_{n\geq 0}$ crescător .... 3 puncte

3. a) Dacă $1 + 1 = 0$ rezultă $x^2 - 5 = (x - 1)(x + 1)$, fals .... 2 puncte

b) $a^5 - 1 = 4^{-1}a^2(a-1)\left((2a^2 + 2a^{-1} + 1)^2 - 5\right)$ pentru orice $a \in K^*$ .... 2 puncte

Dacă $a^5 - 1 = 0$ rezultă $a = 1$ şi $f : K^* \to K^*, f(x) = x^5$ injectivă, deci bijectivă.

Rezultă $X^5 + a = X^5 + b^5 = (X + b)(\cdots)$ şi deci reductibilitatea polinomului .... 3 puncte

4. Considerăm $h = f - L$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$. Atunci

$$\frac{1}{n}\int_0^n f(x)g\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^n h(x)g\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x + \frac{L}{n}\int_0^n g\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x.$$

Ultima integrală este $L\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ prin schimbare de variabilă.

Orice raționament echivalent cu cel de până aici .... 2 puncte

$\left|\frac{1}{n}\int_0^n h(x)g\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M}{n}\int_0^n |h(x)|\mathrm{d}x$, unde M este o margine pentru g (sau raționament echivalent) .... 2 puncte

Fie H o primitivă pentru $|h|$; avem cu L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n} = \lim_{x\to\infty}|h(x)| = 0$$

şi deci $\frac{M}{n}\int_0^n |h(x)|\mathrm{d}x \to 0$ .... 3 puncte